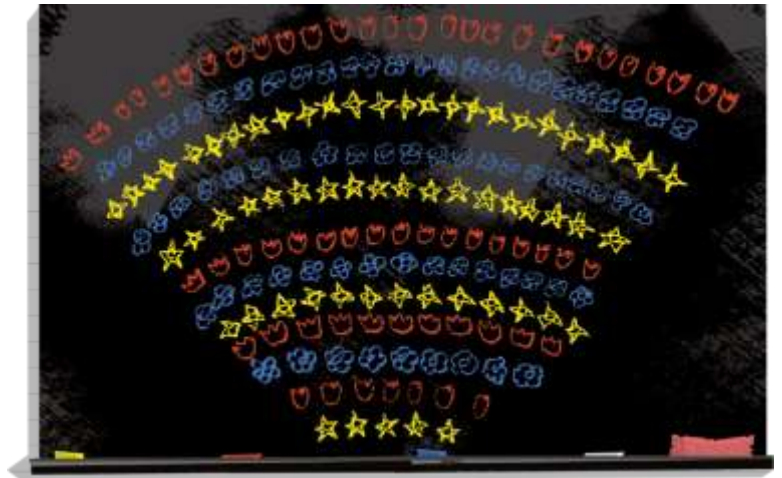


Számtani sorozat

A ballagás előtt a hetedikesek díszítették az osztályt. A lányok kis virágokat rajzoltak a táblára az ábrán látható alakban. A leg-alsó sorba 5 virág került. Minden sorban kettővel több virág volt, mint az alatta lévőben. A 12 lány mindegyike egy-egy sor virágot rajzolt.



1. Mennyi virágot rajzolt az utolsónak sorra kerülő lány?
2. Hány virágot rajzoltak a lányok összesen?

Megoldás

1. A virágok soronkénti száma egy sorozatot alkot, amelynek elemei: $a_1=5$; $a_2=7$; $a_3=9$; $a_4=11$. Tovább számolva eljutunk az $a_{12}=27$ -hez. Tehát a 12. sorban 27 virág volt.
2. A díszítéshez felrajzolt virágok számát kiszámíthatjuk, ha összeadjuk a sorokban lévő virágok számát. Ezt most még meg tudnánk tenni, és nem is tartana sokáig, de keressünk olyan meg-oldást, amely nem csak 12, de 1222 vagy tetszőlegesen sok elem esetén is használható!

Szerencsére most egy olyan különleges sorozattal van dolgunk, ahol minden elem ugyan-annyival változik az előzőhöz képest. Írjuk fel a sorozat tagjainak az összegét, majd írjuk fel az összeget még egyszer, de fordított sorrendben! Ügyeljünk, hogy a tagok pontosan egymás alá kerüljenek!

$$5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 + 25 + 27$$

$$27 + 25 + 23 + 21 + 19 + 17 + 15 + 13 + 11 + 9 + 7 + 5$$

Egy összeadás sorrendje tetszőleges lehet. Ne soronként adjuk össze az elemeket, hanem oszloponként!

Mivel minden elem ugyanannyival változott meg az előzőhöz képest, ezért minden összeg 32 lesz. A 32-t 12-szer kell összeadnunk, és akkor megkapjuk az összeg kétszeresét: $12 \cdot 32 = 384$.

$$5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 + 25 + 27$$

$$\underline{27 + 25 + 23 + 21 + 19 + 17 + 15 + 13 + 11 + 9 + 7 + 5}$$

$$32 + 32 + 32 + 32 + 32 + 32 + 32 + 32 + 32 + 32 + 32 + 32$$

A sorozat 12 elemének az összege $12 \cdot 32 = 384$, tehát a lányok 192 virágot rajzoltak fel a táblára.

Az 1. példában olyan sorozatot kaptunk, amelynek minden eleme 2-vel volt nagyobb, mint az előtte lévő elem.	Jelölésekkel felírva: $a_2 = a_1 + 2$ $a_3 = a_2 + 2$ $a_4 = a_3 + 2$ $\vdots$ $a_{12} = a_{11} + 2$	$a_2 - a_1 = 2$ $a_3 - a_2 = 2;$ $a_4 - a_3 = 2;$ $\vdots$ $a_{12} - a_{11} = 2$	Ez ugyanazt jelenti, mint hogy a második tagtól kezdve bármely tagból kivonva az előtte álló tagot kettőt kapunk.
Ezt általánosítva így írhatjuk:	$a_n = a_{n-1} + 2$	$a_n - a_{n-1} = 2$	

Nézzük át, mit figyelhettünk meg ebben a sorozatban!

- **A sorozat következő eleme mindig ugyanannyival nő az előzőhöz képest.**
- **Bármely két szomszédos elem különbsége állandó.**
- **Bármely három egymást követő tag esetén a középső tag egyenlő a két szélső tag számtani közepével (összegének a felével).**

Az ilyen típusú sorozatokat számtani sorozatoknak nevezzük.

A **különbséget** idegen szóval **differentiának** mondjuk, és ***d***-vel jelöljük.

Számtani sorozat esetében nem szükséges minden tagot kiszámítani ahhoz, hogy megtudjuk például a sorozat 20. tagját.

Ugyanis:

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d;$$

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d \dots$$

Tehát minden tagot úgy kapunk, hogy ***d***-t adunk hozzá a sorozat előző tagjához, ezért: $a_{20} = a_1 + 19d$

Hogyan lehet meghatározni a számtani sorozat első néhány tagjának összegét?

A megoldás módszere ugyanaz, mint a példában látott. **Az elemeket növekvő, majd csökkenő sorrendben is felírjuk, majd párosítjuk őket. A párok összege mindig ugyanannyi.**

A páronkénti összeget megszorozzuk az elemek számával, majd az eredményt elosztjuk 2-vel. $\frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$

Ez a módszer **Gauss** német matematikus nevéhez fűződik.

Érdekesség



Carl Friedrich Gauss (1777–1855) német matematikus, fizikus és csillagász. Munkásságának elismeréseként „a matematika fejedelme” névvel illetik.

Gauss nevéhez egy közismert iskolai történet is fűződik. Általános iskolai tanára azzal akarta kitölteni diákjai idejét, hogy összeadhatja velük az egész számokat 1-től 100-ig. *Jó lesz ez gyakorlásnak* – gondolta, és állítólag azt tervezte, hogy ez idő alatt átlapozza az újságját.

A fiatal Gauss azonban keresztülhúzta a tanár terveit. Alig ült le a katedrához, észrevette, hogy a kis Gauss jelentkezik. Azt hitte, kérdezni akar valamit, de legnagyobb csodálkozására a gyerek azt állította, hogy végzett a feladattal, és az eredményt akarja közölni. Az eredmény jó volt: 5050.

Gauss ismertette is a gondolatmenetét: A számsor alá fordított sorrendben is leírta a számokat, majd az oszlopokat összeadta, így azonos összegeket

kapott: $1+100=101$; $11+99=110$; $2+99=101$; $12+98=110$; $3+98=101$ stb., ami összesen 100 darab számpár, ahol mindegyik pár összege 101. Ezért vette a $101 \cdot 100$ -at, majd elosztotta 2-vel. Így kapta meg a helyes megoldást, az 5050-et.

A tanár ezek után külön is foglalkozott Gausszal.

Feladatok (A feladatokat megoldva kérem elküldeni az email címemre!)

1. Egy színház nézőterén az első sorban 16 ülőhely van. Minden sorban 3-mal több szék van, mint az előtte levőben.
 - a. Hány szék van a 18. sorban?
 - b. Hányan férnek el összesen a 18 soros színházban?
2. Öt egymást követő egész szám összege 245.
 - a. Melyik a középső szám?
 - b. Melyik a legnagyobb szám?
3. Egy háromszög belső szögeinek nagysága számtani sorozatot alkot. A differencia 27° . Számold ki a háromszög szögeit!
4. Egy háromszög kerülete 36 cm, oldalai számtani sorozatot alkotnak. A differencia 3 cm.
 - a. Mekkora a háromszög oldalai?
 - b. Mekkora a háromszög legnagyobb belső szöge?
5. Egy számtani sorozat első két tagja 9 és 16.
 - a. Mennyi a számtani sorozat differenciája?
 - b. Számold ki a sorozat következő négy elemét!
 - c. Számold ki az első hat tag összegét!
6. Egy számtani sorozat harmadik eleme 11, hatodik eleme 20.
 - a. Mennyi a sorozat differenciája?
 - b. Számold ki a sorozat első elemét!